

Fraleighs misstag: en varning

Ernst Dieterich

1 Inledning

Reella divisionsalgebraer är fascinerande objekt vilka har förbluffat matematiker genom århundraden. De verkar en smula som fundamentala byggstenar för stora delar av matematiken, och deras betydelse drar igenom så skiftande områden som algebra, talteori, topologi, geometri, Lieteori och kvantmekanik. Många matematiker tror att det endast finns fyra reella divisionsalgebraer. Det är dock en missuppfattning vilken denna uppsats ämnar undanröja.

De fyra just nämnda äldsta exemplen på divisionsalgebraer tillkom i avgörande skeden av matematikens historia. Låt mig kort berätta om dem. De *reella talen* \mathbb{R} är lika gamla som den grekiska matematiken. Upptäckten av irrationella tal markerar ursprunget till det specifikt grekiska bidraget till stringensen inom matematiken. Redan 820 f.Kr. skrev Theodoros av Kyrene i "Nomoi" begeistrat om de irrationella talens existens: "Ni tappra hellener, detta är ett av de ting om vilka det sägs vara en skam om man inte vet det, och om man vet det nödvändiga så är det ändå inte någon särskild ära." De *komplexa talen* \mathbb{C} uppträdde för första gången i den italienska senrenässansen när Tartaglia och Cardano kring 1540 använde dem som ett hjälpmedel för att lösa kvadratiska och kubiska ekvationer. Mot slutet av 1820-talet började Hamilton med sina försök att generalisera de komplexa talen genom att hitta en divisionsalgebrastruktur på \mathbb{R}^3 . Efter ett och ett halvt decennium av motgångar hoppade han från \mathbb{R}^3 in i \mathbb{R}^4 och lyckades, i oktober 1843, att upptäcka *kvaternionerna* \mathbb{H} . Senare skrev han retrospektivt om denna upplevelse: "I felt a problem to have been at that moment solved, an intellectual want relieved, which had haunted me for at least fifteen years before". Redan i december 1843 upptäckte Graves *oktonionerna* \mathbb{O} . De kan beskrivas som ett reellt vektorrum $\mathbb{O} = \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ vilket är utrustat med multiplikationen $(w, x)(y, z) = (wy - \bar{z}x, x\bar{y} + zw)$, där \bar{y} betecknar konjugatet till y . Graves berättade om sin forskning i ett brev till Hamilton vilken emellertid inte publicerade detta förrän 1848. Under tiden upptäckte, oberoende av Graves, även Cayley oktonionerna år 1845, och han publicerade sitt resultat omgående. Av den orsaken kallas oktonionalgebra nuförtiden ofta Cayleyalgebra.

Fastän reella divisionsalgebraer som ej är isomorfa med någon av $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$

eller \mathbb{O} finns i överflöd, så är de dock inte lätta att konstruera. Därför är det inte att undra på att de fyra klassiska exemplen är de enda som en ickespecialist kan förväntas känna till. Men hur förvånad blir man inte när man slår upp en beprövad lärobok och hittar ett “teorem” som hävdar entydighet hos de fyra klassiska exemplen!

Fraleighs “A First Course in Abstract Algebra” är en monografi som i minst tre decennier varit i bruk i flera nordiska länders universitets- och högskoleundervisning. Jag citerar ur slutet av kapitel åtta (jfr. [?, s. 428]), där Fraleigh återger följande “... famous results regarding division algebras over the real numbers.

Theorem *The real numbers, the complex numbers, and the quaternions are the only (up to isomorphism) associative division algebras over the real numbers (Frobenius, 1878). The only additional division algebra over the real numbers is the Cayley algebra, which is a vector space of dimension 8 over \mathbb{R} (Bott and Milnor, 1957)."*

Varje oändligdimensionell kroppsutvidgning av \mathbb{R} utgör ett motexempel till Fraleighs teorem. Men detta ytliga fel åsyftar vi inte. Låt oss rätta till det genom att komma överens om att, i hela denna uppsats, alla algebror är underförstådda att vara ändligdimensionella. Då blir teoremets första påstående sant. Det är känt som “Frobenius sats”, och dess originalbevis finns i [?]. Däremot förblir teoremets andra påstående fortfarande grovt falskt, och just det är poängen som ska dryftas nedan. För att övertyga läsaren om sanningen i vår kritik ska vi härnäst tillverka en stor familj av (fyradimensionella) motexempel.

2 Motexempel till Fraleighs teorem

Kom ihåg att en reell *algebra* är ett reellt vektorrum A som är utrustat med en bilinjär multiplikation $A \times A \rightarrow A$, $(x, y) \mapsto xy$. I enlighet med konventionen ovan kräver vi även att $\dim A < \infty$. En reell *divisionsalgebra* är en reell algebra A så att $\dim A > 0$, och $xy = 0$ endast om $x = 0$ eller $y = 0$. Det är det sistnämnda villkoret man menar när man säger att A inte har några nolldelare. Just denna egenskap är vidare ekvivalent med att ekvationerna $ax = b$ och $ya = b$ har entydiga lösningar $x, y \in A$ för alla $a \in A \setminus \{0\}$, $b \in A$. Detta möjliggör bildandet av vänsterbråk $x = a \backslash b$ och högerbråk $y = b / a$, vilket förklarar terminologin “divisionsalgebra”.

Fraleighs definition av begreppet divisionsalgebra är mer restriktiv än den just återgivna, såtillvida att han dessutom kräver existensen av ett identitets-element $1 \in A$ och av multiplikativa inverser (dvs. $ax = 1 = ya$ medför $x = y$).

För att förbereda vår konstruktion av motexempel inför vi en smula notation. Vi sätter $\mathcal{K} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathcal{T}$, där $\mathcal{T} = \{d \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < d_1 \leq d_2 \leq d_3\}$. Varje

$x \in \mathbb{R}^3$ bestämmer en linjär endomorfism $x \times ? : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ via $y \mapsto x \times y$, där \times betecknar vektorprodukten. Endomorfismen $x \times ?$ i sin tur representeras i standardbasen av en antisymmetrisk matris B_x , och den har formen

$$B_x = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

För varje $d \in \mathcal{T}$ betecknar D_d diagonalmatrisen med diagonalföljd d .

Utifrån en godtycklig trippel $\kappa = (x, y, d) \in \mathcal{K}$ konstruerar vi nu en fyradimensionell reell algebra $A(\kappa)$ genom att utrusta vektorrummet $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ med den bilinjära multiplikationen

$$(\alpha, v)(\beta, w) = (\alpha\beta - v^T w + v^T B_x w, \alpha w + \beta v + (B_y + D_d)(v \times w)) .$$

Vidare inför vi en ekvivalensrelation på \mathcal{K} genom att sätta $(x, y, d) \sim (x', y', d')$ om $(Sx, Sy) = (x', y')$ och $SD_d S^T = D_{d'}$ för något $S \in SO_3(\mathbb{R})$. Därmed är vi redo att formulera några egenskaper hos konstruktionen $\kappa \mapsto A(\kappa)$.

Sats 2.1 [?, s. 14]. (i) För varje $\kappa \in \mathcal{K}$ är $A(\kappa)$ en fyradimensionell reell divisionsalgebra, även i Fraleighs bemärkelse.

(ii) För alla $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$ gäller att divisionsalgebrorna $A(\kappa)$ och $A(\kappa')$ är isomorfa om och endast om $\kappa \sim \kappa'$.

Bevis. (i) Låt $\kappa = (x, y, d)$ vara givet. Främst visar vi att $A(\kappa)$ inte har några nolldelare. Låt alltså (α, v) och (β, w) vara vektorer i $A(\kappa)$ sådana att $(\alpha, v)(\beta, w) = (0, 0)$. Det betyder att α, β, v, w uppfyller ekvationssystemet

$$\begin{cases} \alpha\beta - v^T w + v^T B_x w = 0 \\ \alpha w + \beta v + (B_y + D_d)(v \times w) = 0 \end{cases}$$

Av andra ekvationen får vi $0 = (v \times w)^T (\alpha w + \beta v + (B_y + D_d)(v \times w)) = (v \times w)^T (B_y + D_d)(v \times w) = (v \times w)^T D_d (v \times w)$, alltså $v \times w = 0$, vilket betyder att vektorerna v och w är proportionella. Därmed blir även $v^T B_x w = 0$, och ekvationssystemet ovan reduceras till

$$\begin{cases} \alpha\beta - v^T w = 0 \\ \alpha w + \beta v = 0 \end{cases}$$

Man inser lätt att detta medför $v = 0$ eller $w = 0$. Alltså gäller $\alpha = 0$ eller $\beta = 0$, och därmed även $(\alpha, v) = (0, 0)$ eller $(\beta, w) = (0, 0)$.

För att vidare visa att $A(\kappa)$ även i Fraleighs bemärkelse är en reell divisionsalgebra räcker det att verifiera att $(1, 0)(\alpha, v) = (\alpha, v) = (\alpha, v)(1, 0)$ gäller för alla $(\alpha, v) \in A(\kappa)$, och

$$(\alpha, v) \frac{(\alpha, -v)}{\alpha^2 + v^T v} = (1, 0) = \frac{(\alpha, -v)}{\alpha^2 + v^T v} (\alpha, v)$$

gäller för alla $(\alpha, v) \in A(\kappa)$ så att $(\alpha, v) \neq (0, 0)$.

(ii) Låt $\kappa = (x, y, d)$ och $\kappa' = (x', y', d')$ vara givna. Antag först att $\kappa \sim \kappa'$. Då finns det ett $S \in SO_3(\mathbb{R})$ så att $(Sx, Sy) = (x', y')$ och $SD_dS^T = D_{d'}$. Välj ett sådant S , låt $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vara den rotation som i standardbasen representeras av S och sätt $\varphi = \mathbb{I}_{\mathbb{R}} \times \sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, $(\alpha, v) \mapsto (\alpha, Sv)$. Då är $\varphi : A(\kappa) \rightarrow A(\kappa')$ en linjär bijektion. Med hjälp av formeln $B_{Sx} = SB_xS^T$ verifierar man direkt att φ dessutom uppfyller $\varphi((\alpha, v)(\beta, w)) = \varphi(\alpha, v)\varphi(\beta, w)$ för alla $(\alpha, v), (\beta, w) \in A(\kappa)$. Alltså är $\varphi : A(\kappa) \rightarrow A(\kappa')$ en algebraisomorfism.

Antag omvänt att algebraerna $A(\kappa)$ och $A(\kappa')$ är isomorfa. Välj en algebraisomorfism $\varphi : A(\kappa) \rightarrow A(\kappa')$. Man kan då visa (se [?] eller [?] för detaljer) att $\varphi = \mathbb{I}_{\mathbb{R}} \times \sigma$, där $\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ är en rotation vars representationsmatris S i standardbasen uppfyller $(Sx, Sy) = (x', y')$ och $SD_dS^T = D_{d'}$. Alltså gäller $\kappa \sim \kappa'$.

Sats 2.1 får en enkel geometrisk tolkning så snart vi identifierar tripplarna $(x, y, d) \in \mathcal{K}$ med de konfigurationer i \mathbb{R}^3 som består av ett par av punkter (x, y) samt en ellipsoid $E_d = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid z^T D_d z = 1\}$ i normalt läge. Ekvivalensen $(x, y, d) \sim (x', y', d')$ betyder då precis att $E_d = E_{d'}$ och att det finns en rotationssymmetri till E_d som överför x till x' samtidigt som den överför y till y' . Om vi nu väljer $d \in \mathcal{T}$ så att $0 < d_1 < d_2 < d_3$, då är E_d en ellipsoid med tre olika radier, och dess rotationssymmetrigrupp är just Kleins fyragrupp i dess ursprungliga bemärkelse [?, s. 13]. Med notationen $\mathcal{T}_< = \{d \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < d_1 < d_2 < d_3\}$ och $\mathbb{R}_{>0}^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_i > 0 \forall i\}$ får vi då för alla $(x, y, d), (x', y', d') \in \mathbb{R}_{>0}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathcal{T}_<$ att $(x, y, d) \sim (x', y', d')$ omm $(x, y, d) = (x', y', d')$. Observera också att den utmärkta konfiguration som består av en dubbelpunkt i origo samt enhetsfären ger upphov till kvaternionalgebran, dvs. $A(0, 0, (1, 1, 1)) = \mathbb{H}$.

Genom att sammanfoga denna diskussion med sats 2.1 får vi beviset till följande resultat.

Korollarium 2.2 *Familjen $\{A(\kappa)\}_{\kappa \in \mathbb{R}_{>0}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathcal{T}_<}$ är en 9-parameterfamilj av parvis ickeisomorfa 4-dimensionella reella divisionsalgebror, även i Fraleighs bemärkelse, som alla dessutom är ickeisomorfa med \mathbb{H} .*

Kort sagt utgör alltså $\{A(\kappa)\}_{\kappa \in \mathbb{R}_{>0}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathcal{T}_<}$ en 9-parameterfamilj av motexempel till Fraleighs teorem.

Det ska nämnas att man, utifrån en vektorprodukt på \mathbb{R}^7 , kan genomföra en liknande konstruktion av 8-dimensionella reella divisionsalgebror som leder till en 49-parameterfamilj av motexempel till Fraleighs teorem i just den mening som korollarium 2.2 preciserar, men med \mathbb{H} bytt mot \mathbb{O} . (Se [?] för detaljer.)

3 Kompletterande anmärkningar

Som redan nämnts innebär Frobenius sats att $\{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ klassificerar alla associativa reella divisionsalgebraer. En godtycklig algebra kallas *alternativ* omm varje underalgebra som genereras av två element är associativ. Varje associativ algebra är alltså alternativ. Men det finns fler alternativa algebraer än associativa. En sats av Zorn [?] säger nämligen att $\{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}\}$ klassificerar alla alternativa reella divisionsalgebraer.

Mot den bakgrunden kan man misstänka att andra påståendet i Fraleighs teorem egentligen avser Zorns sats och att adjektivet "alternative" har tappats bort. Men den tolkningen är orimlig av två skäl. För det första nämns inte begreppet alternativ algebra någonstans i Fraleighs bok. För det andra siktar Fraleighs referens "Bott and Milnor, 1957" inte på Zorns sats utan åt ett helt annat håll. Låt mig kort skissera vad som döljer sig bakom den referensen.

På 1930-talet upptäckte Hopf att reella divisionsalgebraer är nära besläktade med olika slags topologiska objekt, och att detta samband liksom en växelverkan kan utnyttjas i båda riktningar. Bland annat bevisade han 1940 [?] med hjälp av de reella projektiva rummens homologiteori att en kontinuerlig avbildning $f : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ sådan att $f(-x, y) = -f(x, y) = f(x, -y)$ för alla $(x, y) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1}$ endast existerar om n är en potens av 2. Men varje divisionsalgebrastruktur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $(x, y) \mapsto xy$ ger upphov till en udda kontinuerlig avbildning $f : \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ via $f(x, y) = \frac{xy}{|xy|}$.

Alltså, om A är en reell divisionsalgebra, då måste $\dim A = 2^m$ gälla för något $m \in \mathbb{N}$. Man undrar då vilka m som kan uppträda på så sätt. De fyra klassiska exemplen visar ju att 0,1,2 och 3 faktiskt förekommer som värden på m . Men finns det någon reell divisionsalgebra A med $\dim A = 2^m$, där $m \geq 4$? Svaret på den frågan är nej! Det visade Milnor 1958 [?] genom att utnyttja Botts 1957 publicerade sats [?] om periodiciteten hos homotopigrupperna till de ortogonala och de unitära klassiska grupperna. Sammanfattningsvis gäller alltså följande så kallade (1,2,4,8)-sats.

Sats 3.1 [?],[?],[?]. *Varje reell divisionsalgebra har dimension 1,2,4 eller 8.*

Men strukturen hos en reell divisionsalgebra är långt ifrån entydigt bestämd av algebraens dimension, som korollarium 2.2 visar.

Mycket mer kunde berättas om (1,2,4,8)-satsens historia som utmynnar dels i Adams formel [?] om det maximala antalet linjärt oberoende vektorfält på en sfär, dels i den så kallade K-teorin, en av den moderna topologins mest banbrytande utvecklingar. För den intresserade läsaren rekommenderas Hirzebruchs utmärkta översiktsartikel [?].

Låt oss avslutningsvis betrakta problemet att klassificera alla reella divisionsalgebraer så när som på isomorfi. Det reduceras av (1,2,4,8)-satsen till problemet att klassificera alla reella divisionsalgebraer i dimensionerna

1,2,4 och 8. Man inser lätt att varje endimensionell reell divisionsalgebra är isomorf med \mathbb{R} . Men i dimensionerna 2,4 och 8 är problemet fortfarande olöst.

Den senaste utvecklingen beträffande detta återstående problem avser potensassociativa reella divisionsalgebror. En godtycklig algebra kallas *potensassociativ* om varje underalgebra som genereras av ett element är associativ. Varje alternativ algebra är alltså potensassociativ. Men det finns fler potensassociativa algebror än alternativa. Det gäller nämligen följande tillägg till sats 2.1.

Sats 3.2 [?, s. 14]. (i) För varje $\kappa \in \mathcal{K}$ är $A(\kappa)$ en fyradimensionell potensassociativ reell divisionsalgebra.

(ii) Till varje fyradimensionell potensassociativ reell divisionsalgebra A finns det ett $\kappa \in \mathcal{K}$ sådant att $A(\kappa)$ är isomorf med A .

Genom att sammanfoga sats 3.2 med sats 2.1(ii) inser vi att konstruktionen $\kappa \mapsto A(\kappa)$ inducerar en bijektion mellan mängden \mathcal{K}/\sim av alla ekvivalensklasser i \mathcal{K} och mängden av alla isomorfiklasser av fyradimensionella potensassociativa reella divisionsalgebror. Alltså, om \mathcal{C} är ett tvärsnitt för \mathcal{K}/\sim , då klassificerar $\{A(\kappa) \mid \kappa \in \mathcal{C}\}$ alla fyradimensionella potensassociativa reella divisionsalgebror så när som på isomorfi. Att hitta ett sådant tvärsnitt kan anses som en övning i elementär euklidisk geometri. En lösning \mathcal{C} som utvidgar den redan nämnda 9-parameterfamiljen av konfigurationer $\mathbb{R}_{>0}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathcal{T}_<$ finns publicerad i [?, s. 17-18].

Och vad händer i dimensionerna 2 och 8? Jo, varje tvådimensionell potensassociativ reell divisionsalgebra är faktiskt isomorf med \mathbb{C} . Däremot är problemet att klassificera alla åttadimensionella potensassociativa reella divisionsalgebror än så länge bara delvis löst. Den 49-parameterfamilj som nämndes i slutet av avsnitt 2 är inte uttömmande (jfr. [?]).

4 Epilog

Min före detta student Johan Öhman hade, till skillnad från mig, lärt sig sin Fraleigh väl. Efter det att han under handledningens gång förstått att det finns fler än fyra reella divisionsalgebror uppmärksammade han mig på Fraleighs misstag. Jag skrev ett brev till Fraleigh och fick ett svarsbrev ur vilket jag citerar: "The flaw you found in the statement concerning division algebras was unchanged from several preceding editions of my algebra test. You are the first one to mention it to me. ... I doubt that there will be a seventh edition of the text, as I plan to retire in December, 2000." När jag under en trevlig pratstund i Luminy, i juni 2000, berättade denna historia för Bjørn Dundas blev han chockerad, och han uppmanade mig att publicera en varning i Normat.

Jag tackar både Johan Öhman och Bjørn Dundas. Jag tackar också

Johan Åberg för hans hjälp med svenskan, som inte är mitt modersmål.

References

- [1] Adams, J.F.: Vector fields on spheres, *Ann. of Math.* 75, 603-632 (1962).
- [2] Bott, R.: The stable homotopy of the classical groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 43, 933-935 (1957).
- [3] Dieterich, E.: Zur Klassifikation vierdimensionaler reeller Divisionsalgebren, *Math. Nachr.* 194, 13-22 (1998).
- [4] Dieterich, E.: Quadratic division algebras revisited (Remarks on an article by J.M. Osborn), *Proc. Amer. Math. Soc.* 128, 3159-3166 (2000).
- [5] Dieterich, E.: Eight-dimensional real quadratic division algebras. U.U.D.M. Report 2000:24. To appear in *Annonces de Montpellier en Algèbre*.
- [6] Fraleigh, J.B.: *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley, sixth edition (1999).
- [7] Frobenius, F.G.: Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 84, 1-63 (1878).
- [8] Hirzebruch, F.: *Divisionsalgebren und Topologie. Zahlen*, Springer-Lehrbuch, 3. Auflage, 233-252 (1992).
- [9] Hopf, H.: Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra, *Comment. Math. Helv.* 13, 219-239 (1940/41).
- [10] Klein, F.: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*, B.G. Teubner Verlag, Leipzig (1884).
- [11] Milnor, J.: Some consequences of a theorem of Bott, *Ann. of Math.* 68, 444-449 (1958).
- [12] Zorn, M.: *Theorie der alternativen Ringe*, *Abh. Math. Sem. Hamburg* 8, 123-147 (1931).

Matematiska institutionen, Uppsala universitet, Box 480, S-751 06 Uppsala, Sverige

E-mail: Ernst.Dieterich@math.uu.se

18 oktober 2000